Somme de nombres impairs

On pose $s(1)=1$, $s(2)=3+5$, $s(3)=7+9+11$,... de sorte que $s(n)$ corresponde à la somme des n premiers nombres impairs non encore écrits.

1. Calculer $s(i)$ pour $i=1,2,3$ et 4.

2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

3.a On note $I(k)$ le $k^{\text{ème}}$ entier naturel impair (avec $k\in\mathbb{N}^*$)
Exprimer $I(k)$ en fonction de k.

3.b On pose, pour $N\in\mathbb{N}^*, S(N)=\sum_{k=1}^{N}I(k)$. Calculer $S(N)$.

3.c Calculer, pour $n\in\mathbb{N}^*$, la somme $T(n)=\sum_{i=1}^{n}s(i)$.

3.d En déduire la valeur de $s(n)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

4. A l'aide des résultats précédents, donner la valeur de $\sum_{i=1}^{n}i^3$ en fonction de n.